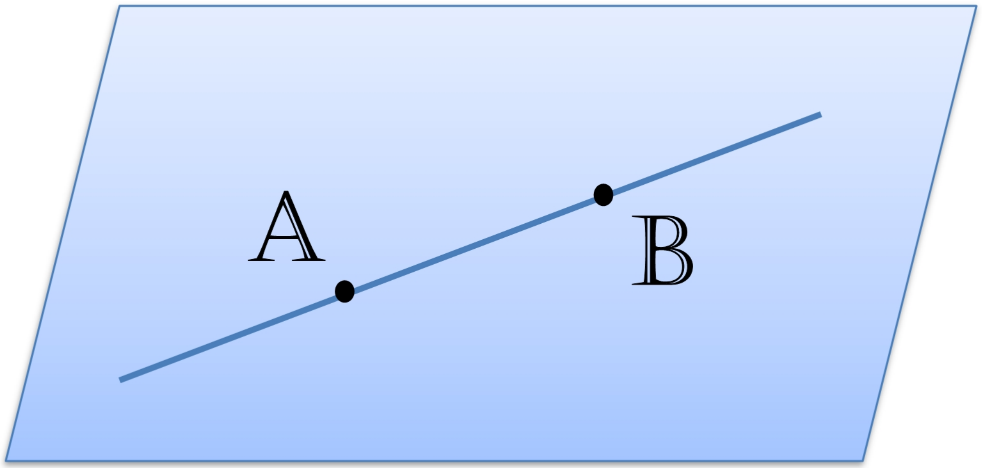
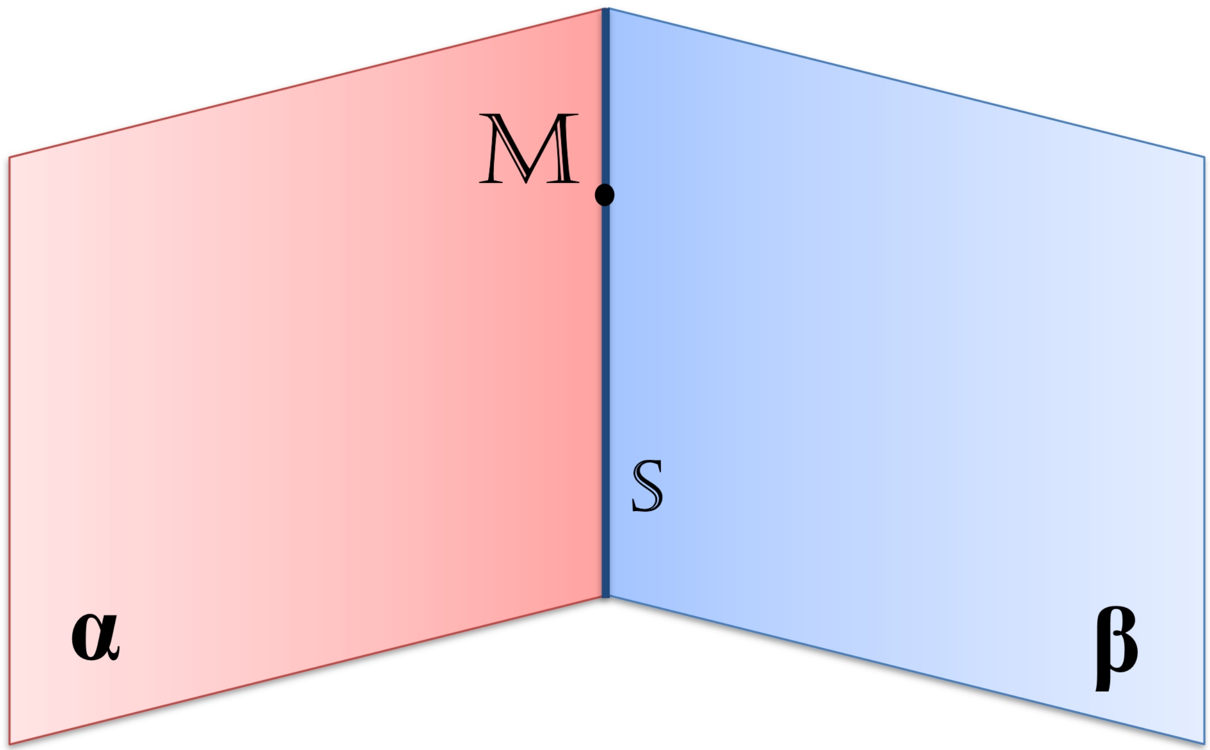
Прави и равнини в пространството

Аксиоми за правите и равнините в пространството

1. ***Аксиома 1:*** Ако две точки от една права лежат в една равнина, то правата лежи в равнината. Ако права и равнина имат точно 1 обща точка, тогава казваме, че правата и равнината се пресичат. Общата точка на правата и равнината се нарича ***пресечна точка*** на права с равнина.

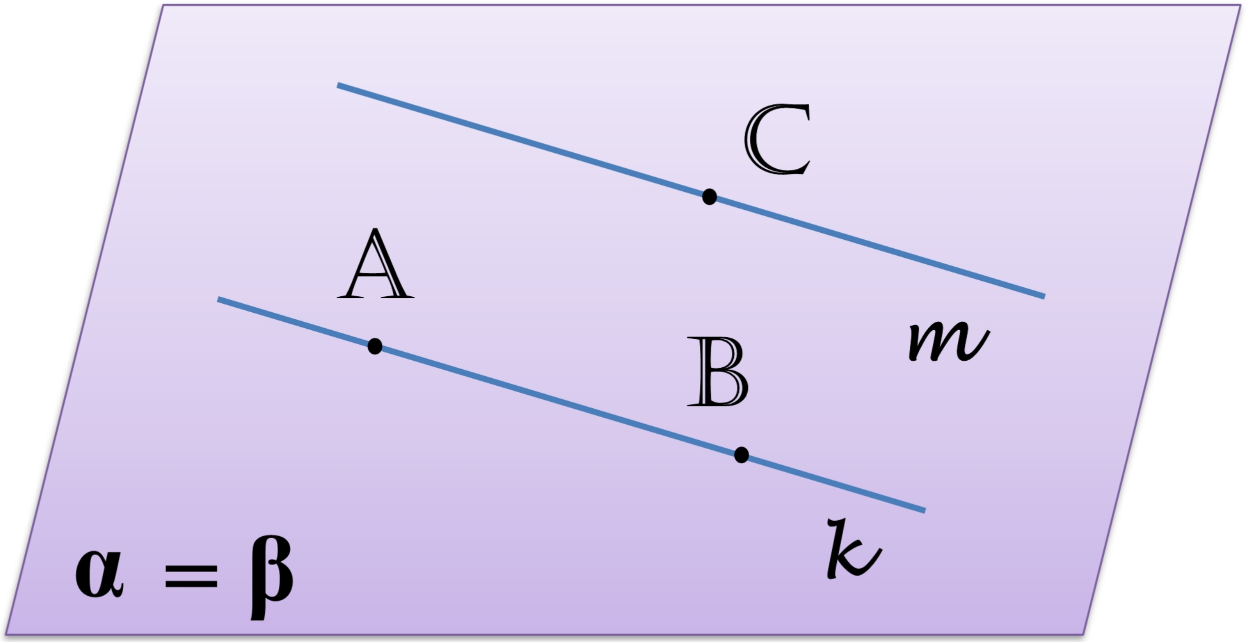


2. *__Аксиома 2:__* **Ако 2 различни равнини имат обща точка, то множеството от общите им точки е права. Равнините се наричат *пресекателни* (пресичащи се), а общата им права – *пресечница* на двете равнини.**



3. ***<u>Аксиома 3:</u>*** **През 3 точки, които не лежат на една права, минава само една равнина.**

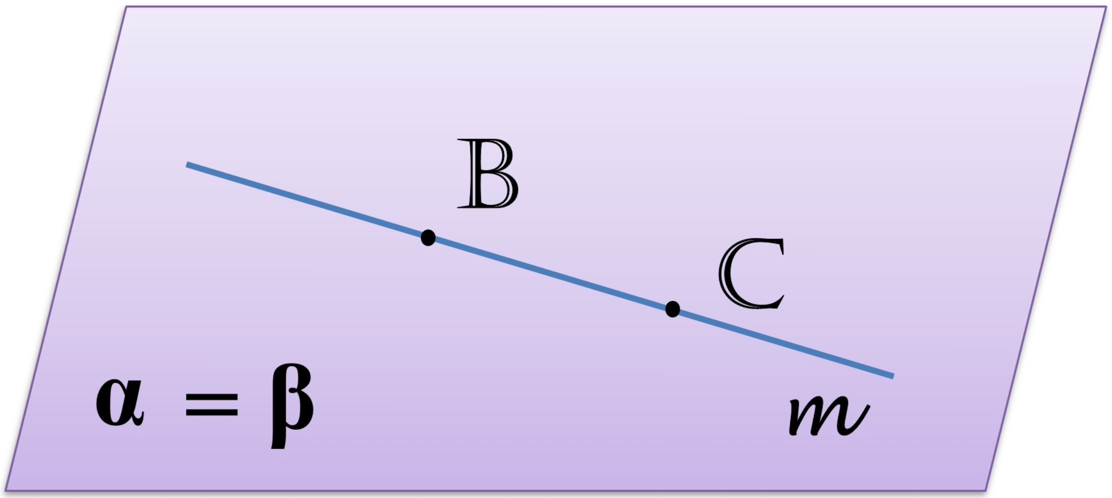
<u>Следствие:</u> **През 2 успоредни прави минава само една равнина.**



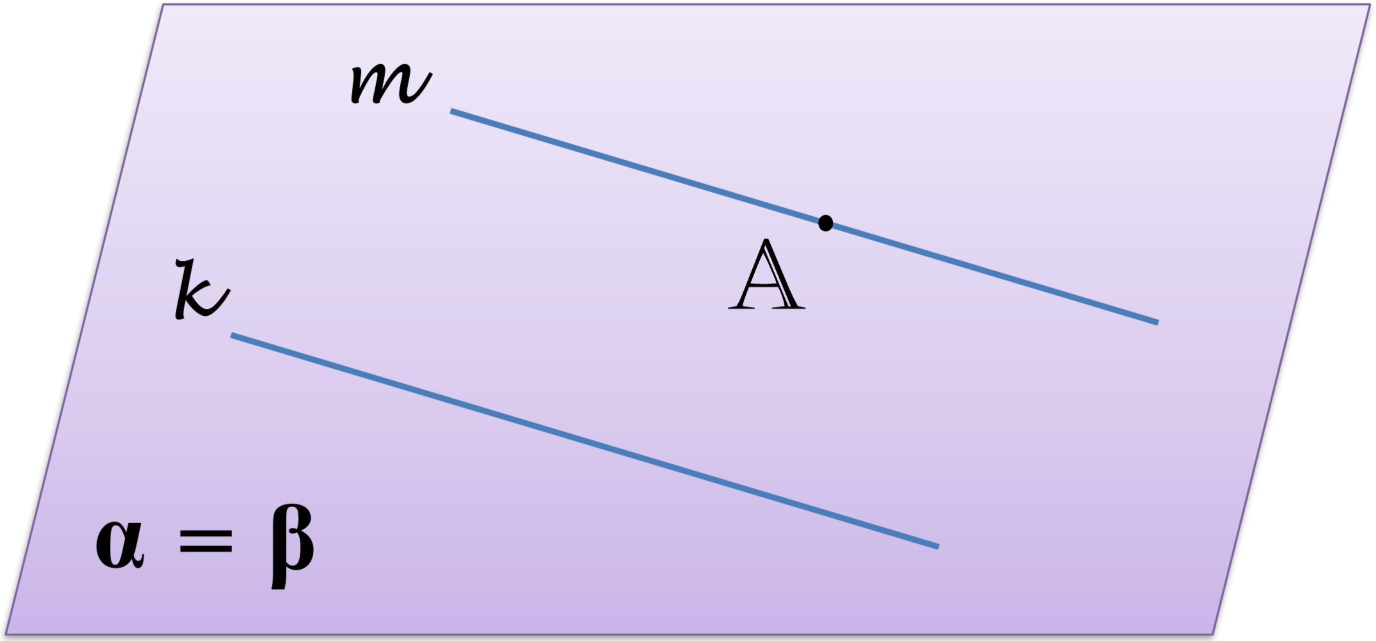
- **Теорема 1:** През права и нележаща на нея точка минава само една равнина.

  Критерии за определяне на една равнина:

  1) 3 точки, които не лежат на 1 права;
  2) 2 пресичащи се прави;
  3) 2 успоредни прави;
  4) права и нележаща на нея точка.



- **<u>Теорема 2:</u> През точка, която не лежи на дадена права, минава само една права, успоредна на дадената.**

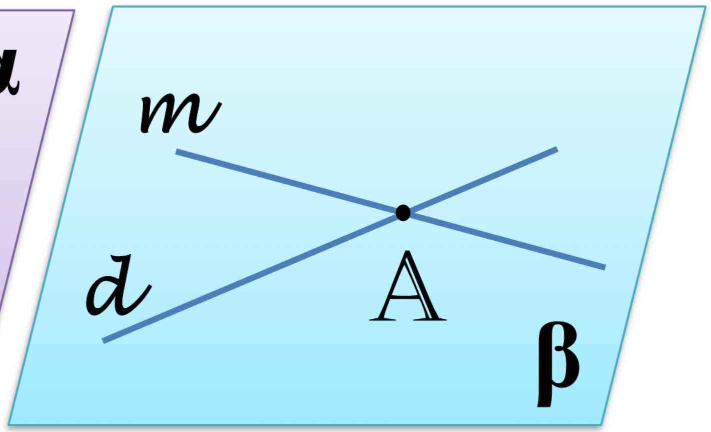


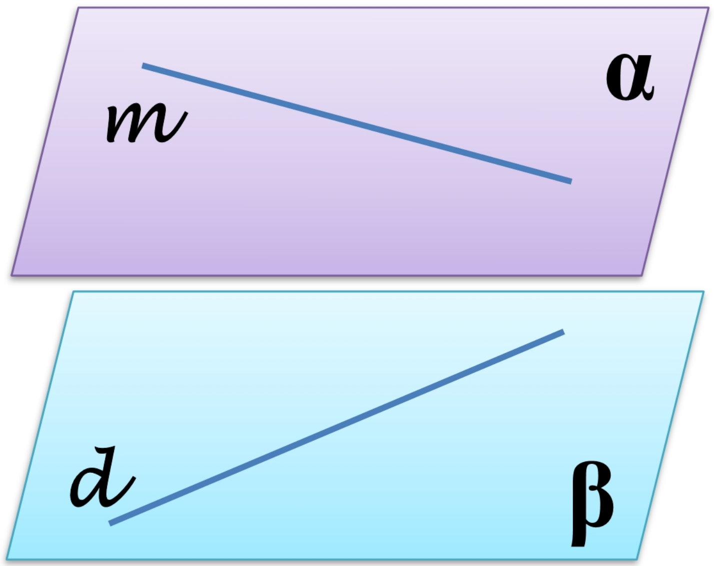
Взаимно положение на 2 прави

Определение 1: 2 прави, които лежат в 1 равнина и нямат обща точка, се наричат ***успоредни*** (∥) ***прави.***

Определение 2: Две различни прави, които имат обща точка, се наричат ***пресичащи се прави.***

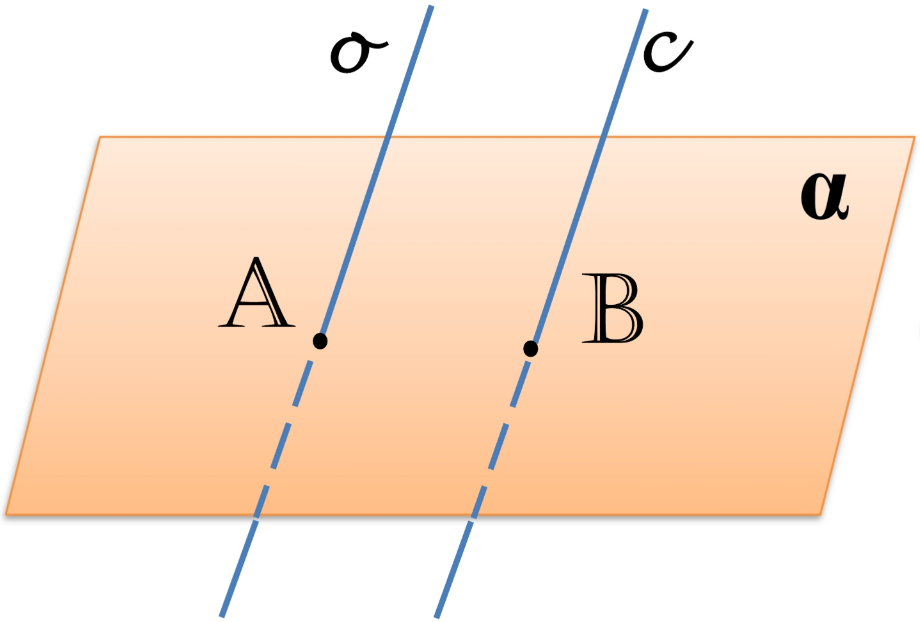
Определение 3: 2 прави, които не лежат в 1 равнина, се наричат ***кръстосани прави.***

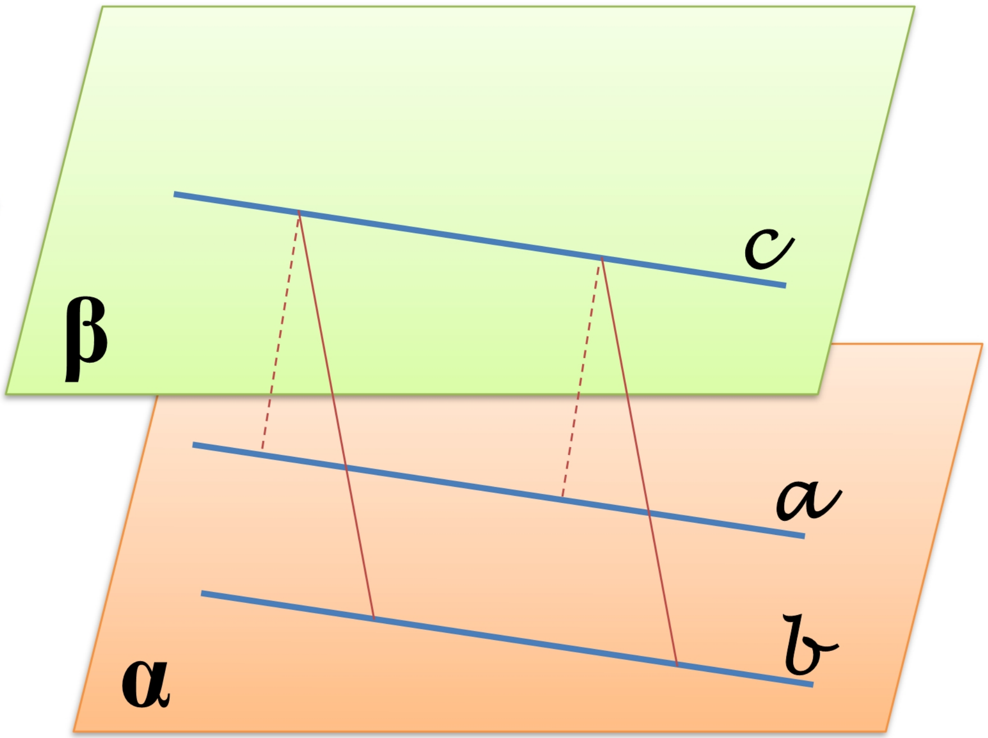




Теореми за успоредни прави

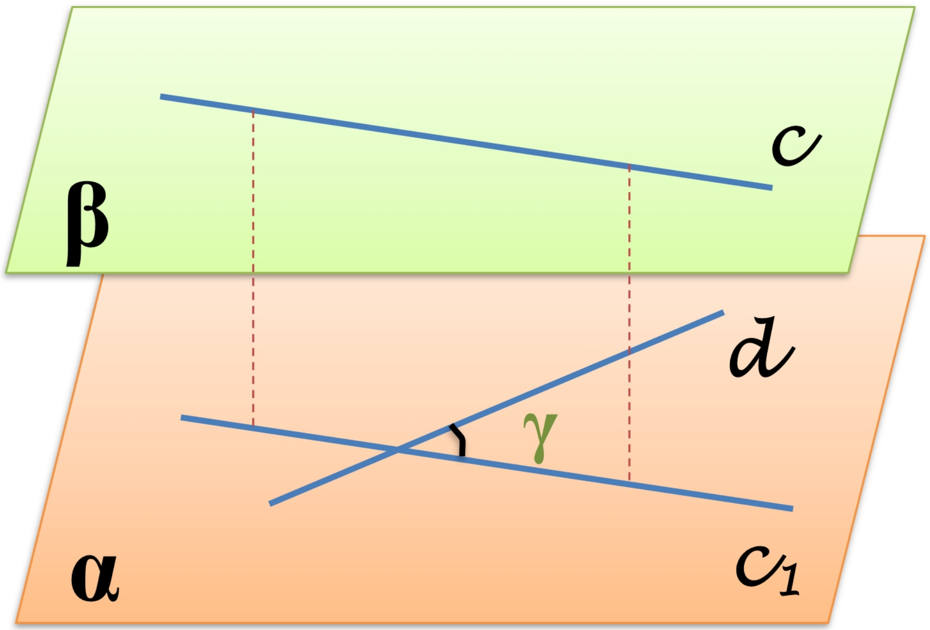
1. <u>Теорема 1:</u> Ако 1 от две успоредни (‖) прави пресича дадена равнина, то и другата права пресича равнината.
2. <u>Теорема 2:</u> 2 различни прави, поотделно успоредни (‖) на трета, са ‖ помежду си.



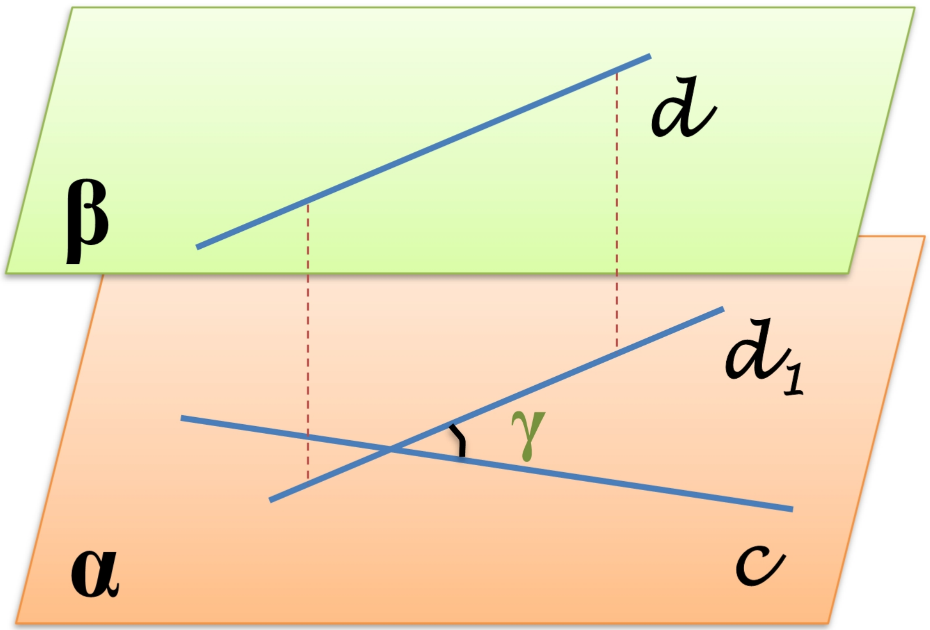


Ъгъл, определен от 2 кръстосани прави

Определение 1: ***Ъгъл, определен от 2 кръстосани прави***, **се нарича ъгълът, определен от 2 пресекателни прави, съответно успоредни на дадените прави, или ъгълът, определен от едната от дадените кръстосани и пресичащи я прави, успоредна на другата кръстосана права.**



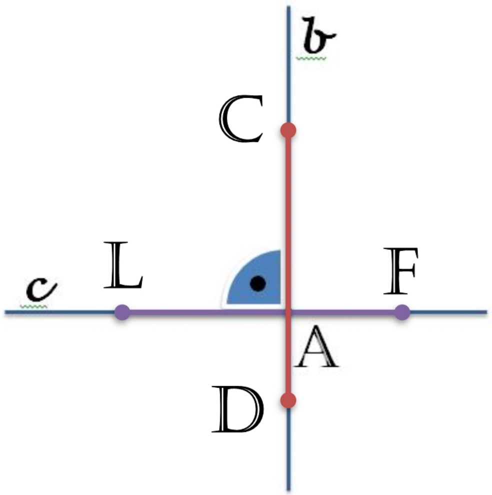
<u>Теорема:</u> **Ъгълът, определен от 2 кръстосани прави, не зависи от избора на пресекателните прави, чрез които го определяме.**

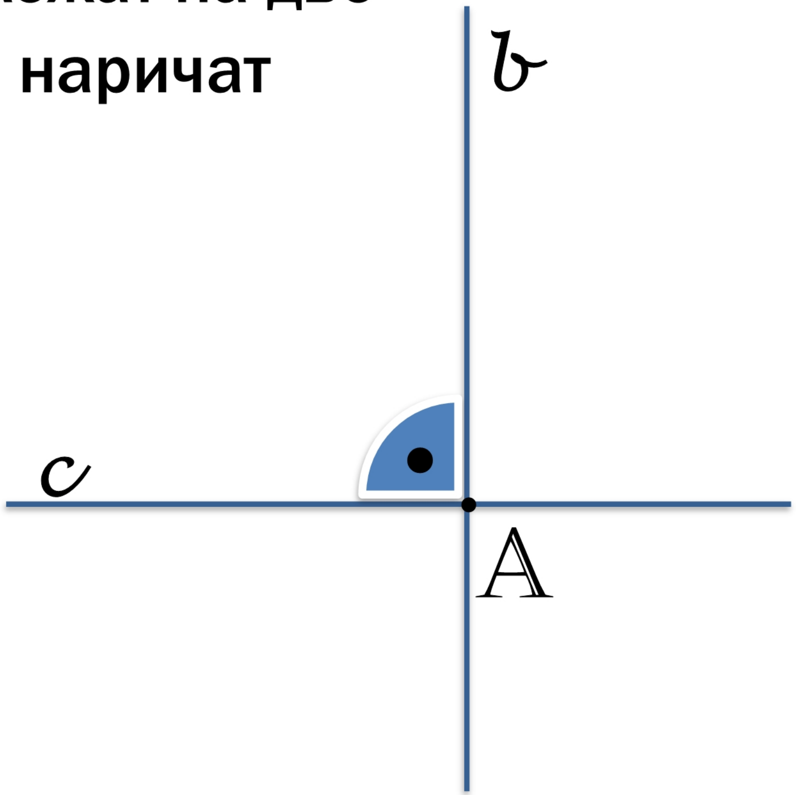


Перпендикулярност между две прави

<u>*Определение 1:*</u> Две прави, които определят прав ъгъл, се наричат ***взаимно перпендикулярни*** ($\perp$) ***прави.***

<u>*Определение 2:*</u> Ако две отсечки лежат на две перпендикулярни ($\perp$) прави, се наричат ***перпендикулярни*** ($\perp$) ***отсечки.***



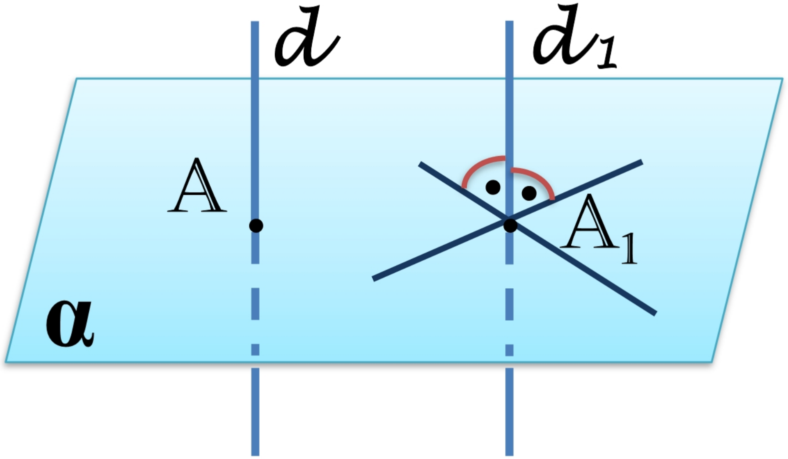


Перпендикулярност на права и равнина

Определение: Ако една права е перпендикулярна на дадена равнина, то тя е перпендикулярна ($\perp$) на всяка права от тази равнина.

Теорема 1: Ако 1 права е $\perp$ на 2 пресекателни прави от дадена равнина, то тази права е $\perp$ на всяка една права от тази равнина.

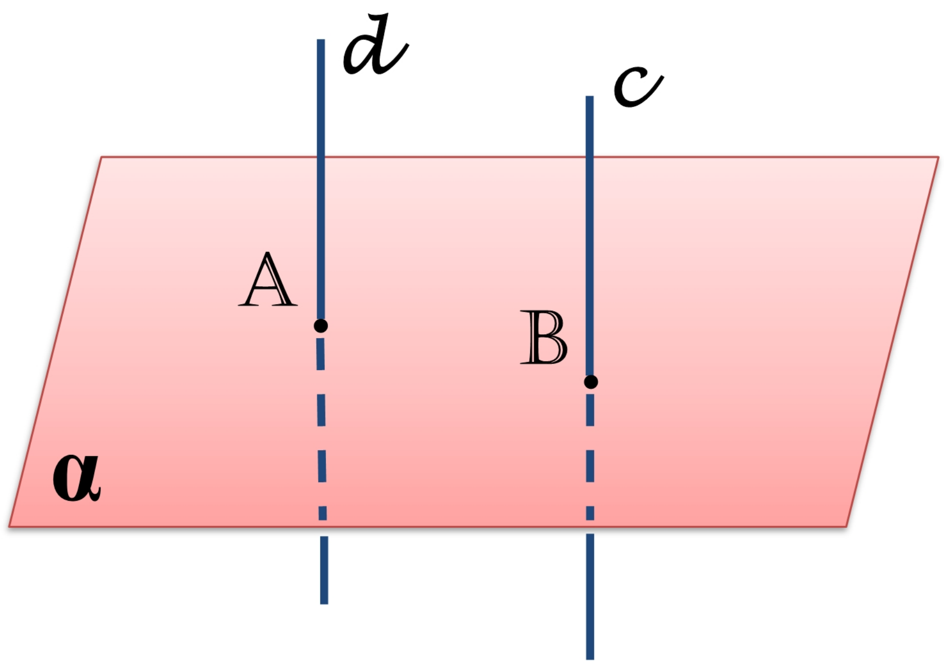
Следствие: Права е $\perp$ на равнина, ако е $\perp$ на пресекателни прави от нея.



Теорема 2: Ако една от 2 успоредни (∥) прави е перпендикулярна ⊥ на дадена равнина, то и другата права е ⊥ на тази равнина.

Следствие: Ако права е ⊥ на равнина, то правата пресича равнината.

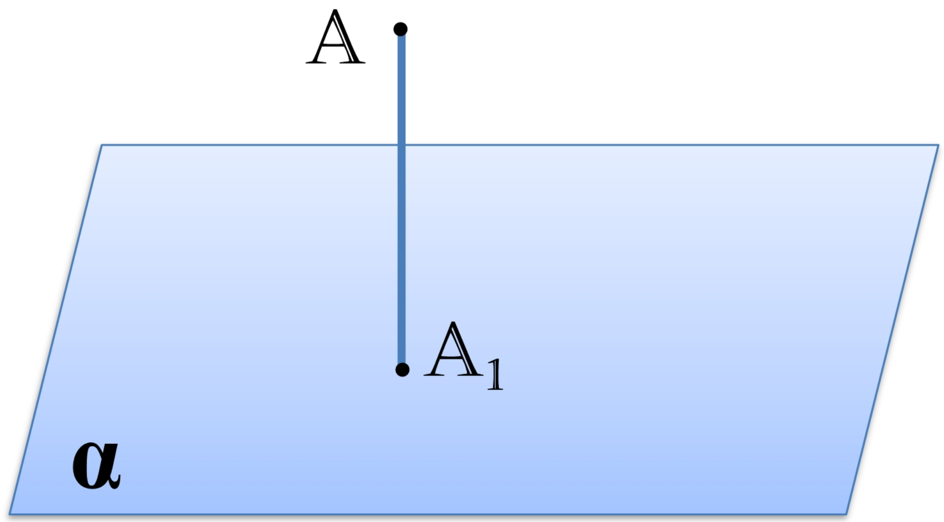
Теорема 3: Ако 2 прави са ⊥ на една равнина, то те са ∥ помежду си.



Разстояние от точка до равнина

Определение 1: Ако α е равнина и т. $A \notin \alpha$, т. $A_1 \in \alpha$ и $AA_1 \perp \alpha$, тогава казваме, че т. A_1 е ***ортогонална проекция*** на A върху α.

Определение 2: Разстоянието от т. A до нейната ортогонална проекция върху равнината α се нарича ***разстояние от т. A до равнината α.***

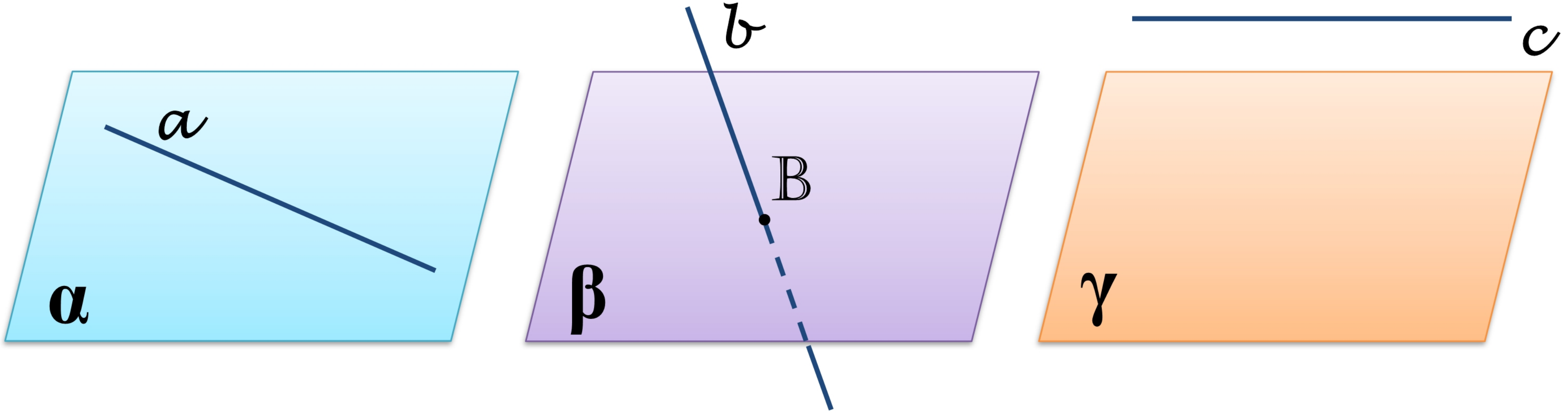


Взаимно положение на права и равнина

В зависимост от разположението на правата и равнината, съществуват следните варианти:

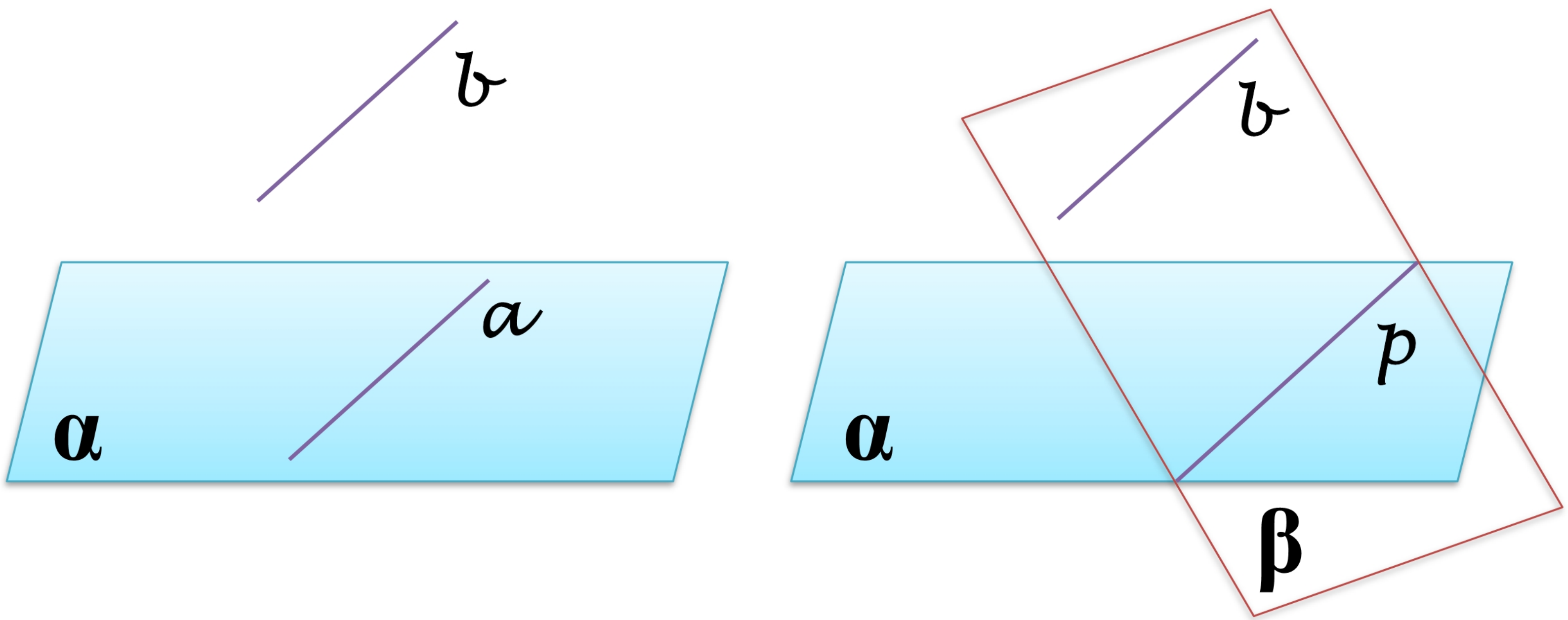
1) правата лежи в равнината;
2) правата и равнината се пресичат;
3) правата и равнината са успоредни.

Определение: ***Права и равнина***, които нямат обща точка, се наричат ***успоредни***.



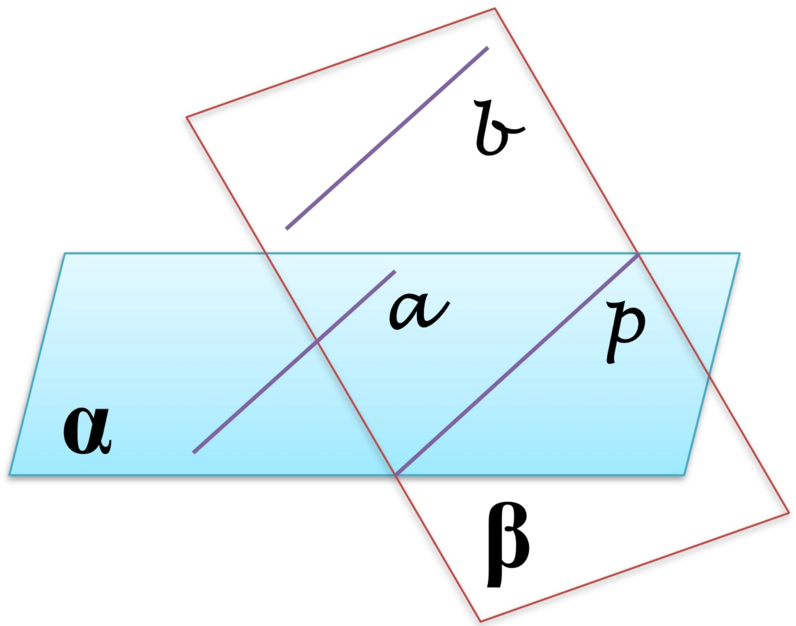
Теореми за успоредност на права и равнина

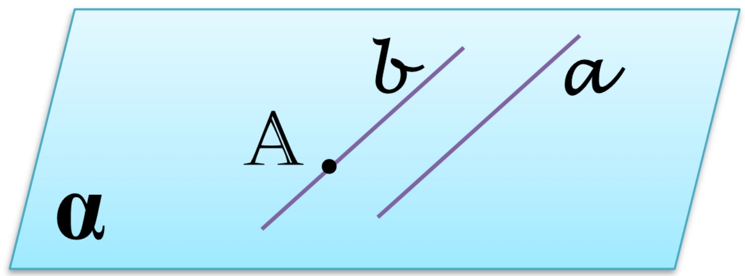
1. <u>Теорема 1</u>: Ако една права не лежи в дадена равнина, но е успоредна (‖) на права, която лежи в равнината, то тя е ‖ на равнината.
2. <u>Теорема 2</u>: Ако по права, ‖ на равнина, минава равнина, която пресича първата равнина, то пресечницата на двете равнини е ‖ на дадената права.



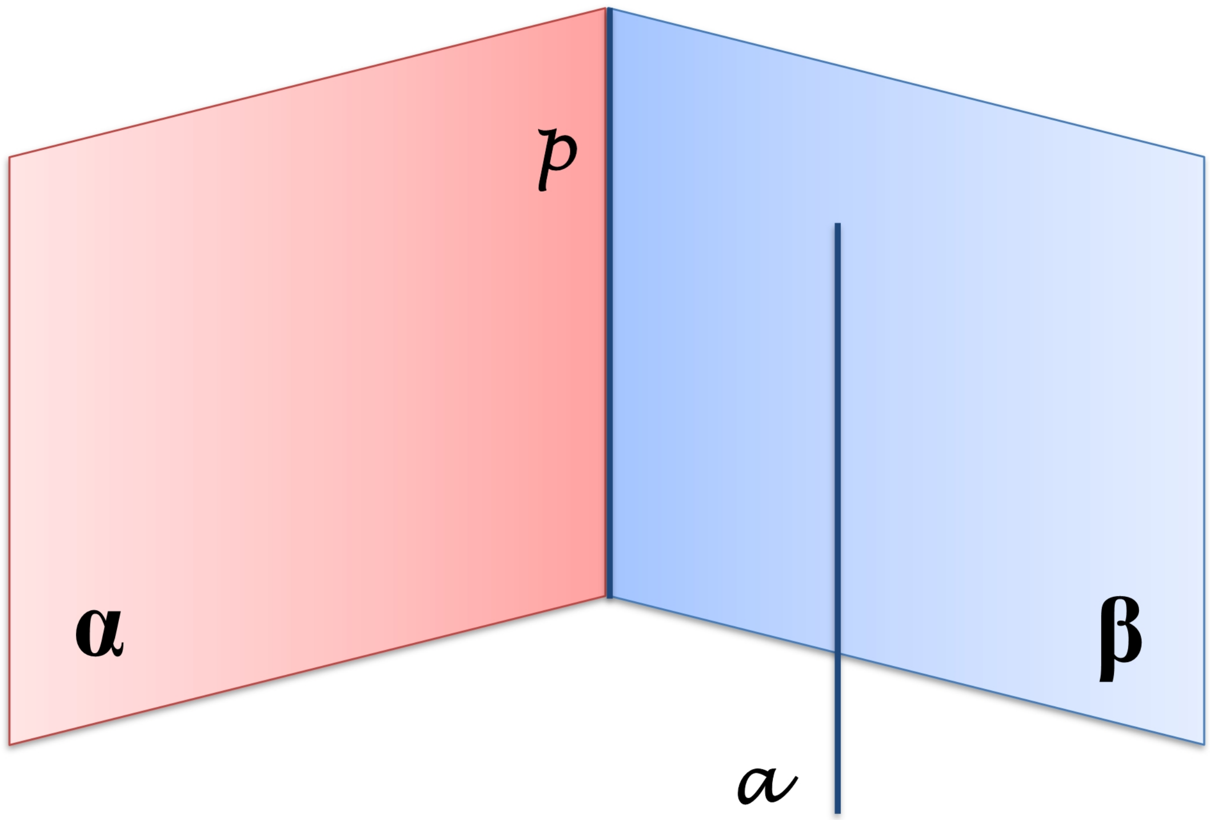
1) *Следствие 1:* Ако 2 пресекателни равнини минават съответно през 2 успоредни прави и пресечницата е различна от тези 2 прави, то тази пресечница е ∥ на всяка от дадените прави.

2) *Следствие 2:* Ако са дадени равнината α, т. А от нея и права *a* ∥ α, то правата *b*, която минава през т. А и е ∥ на а, лежи в α.

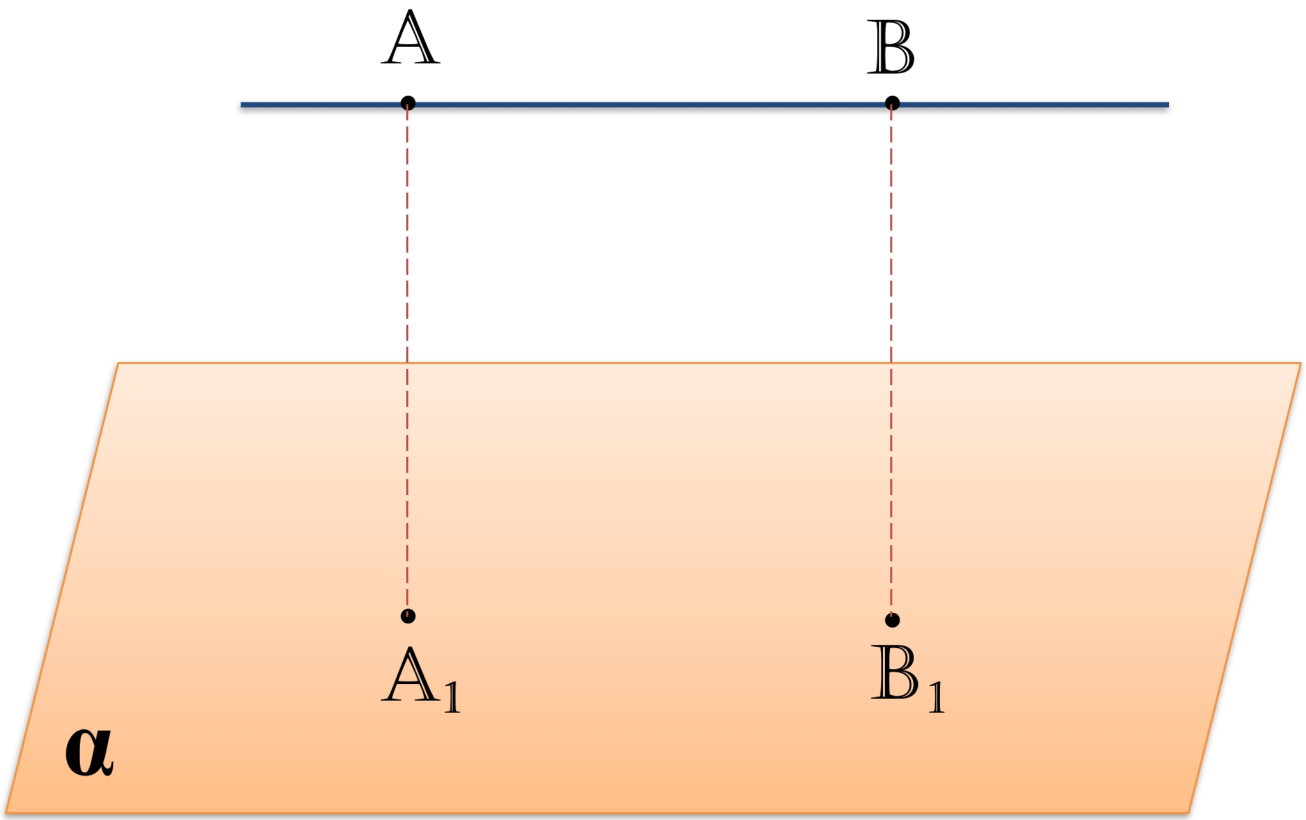




3. <u>Теорема 3:</u> Ако една права е ∥ на 2 пресекателни равнини, то тя е ∥ и на тяхната пресечница.



__*Определение:*__ **Ако права е успоредна на равнина, *разстоянието от правата до равнината* се нарича разстоянието от произволна точка на правата до равнината.**

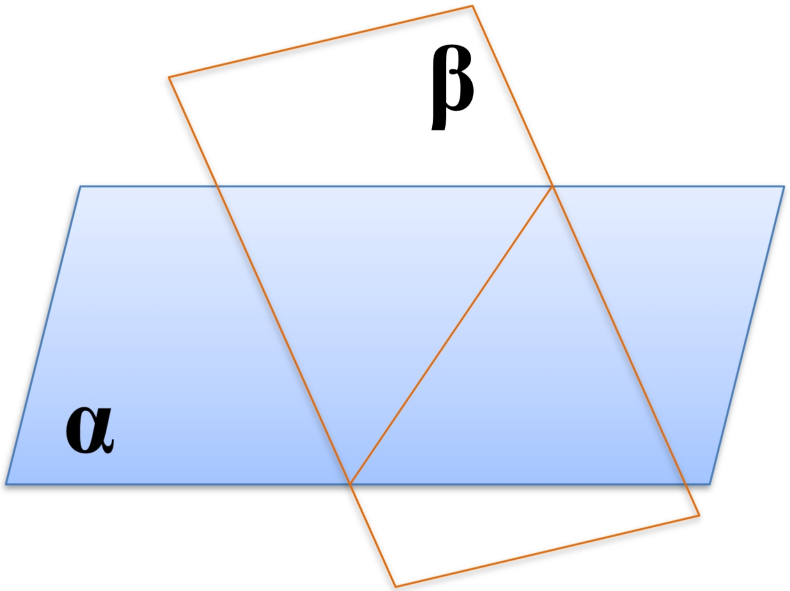


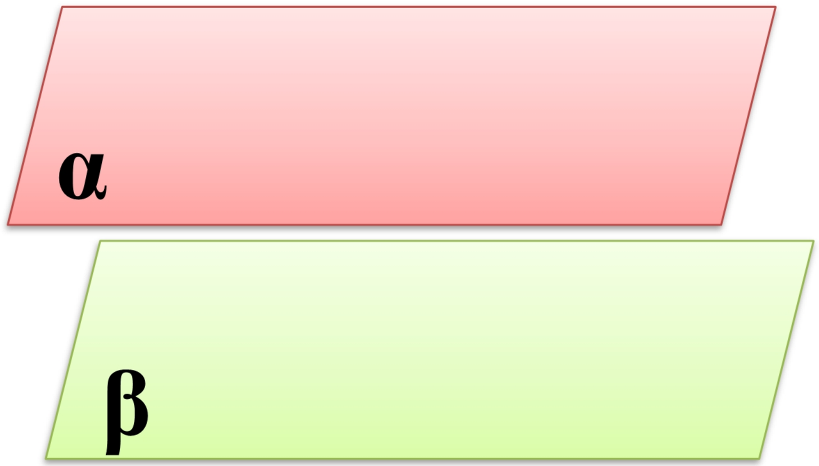
Взаимно положение на две прави

В зависимост от разположението на 2 равнини в пространството, можем да определим кога:

1) равнините са <u>пресекателни;</u>
2) равнините са <u>успоредни.</u>

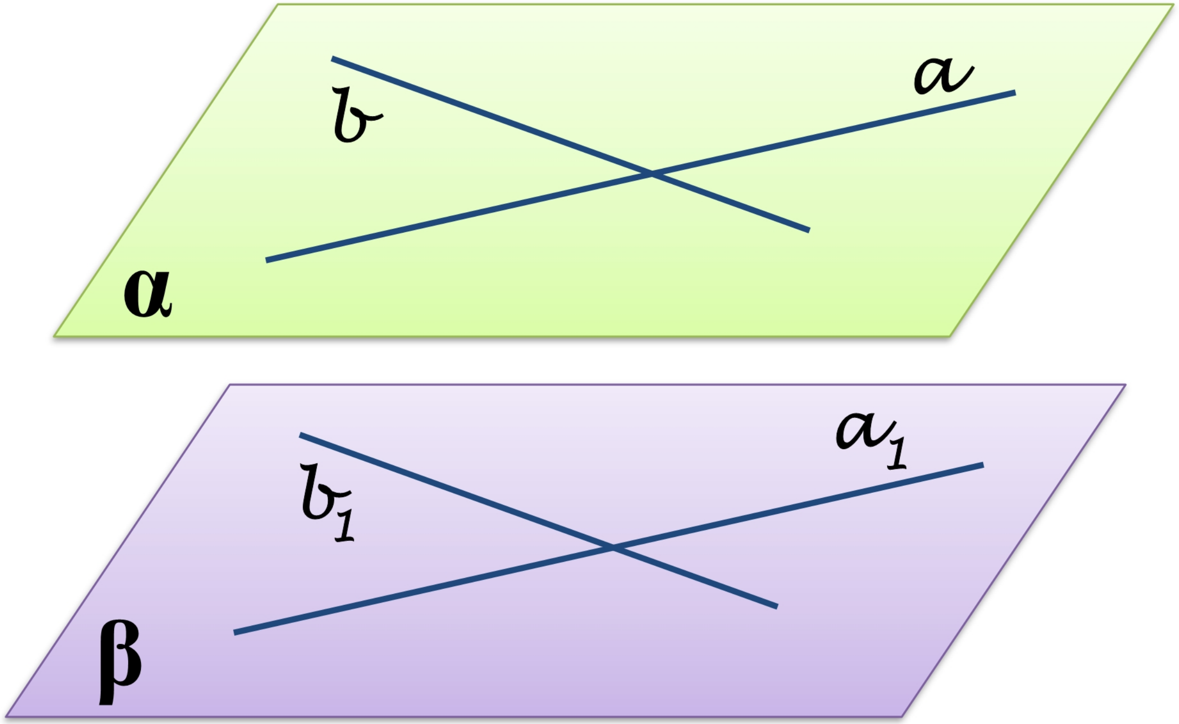
<u>Определение:</u>* *Две равнини, които нямат обща точка, се наричат ***успоредни***.



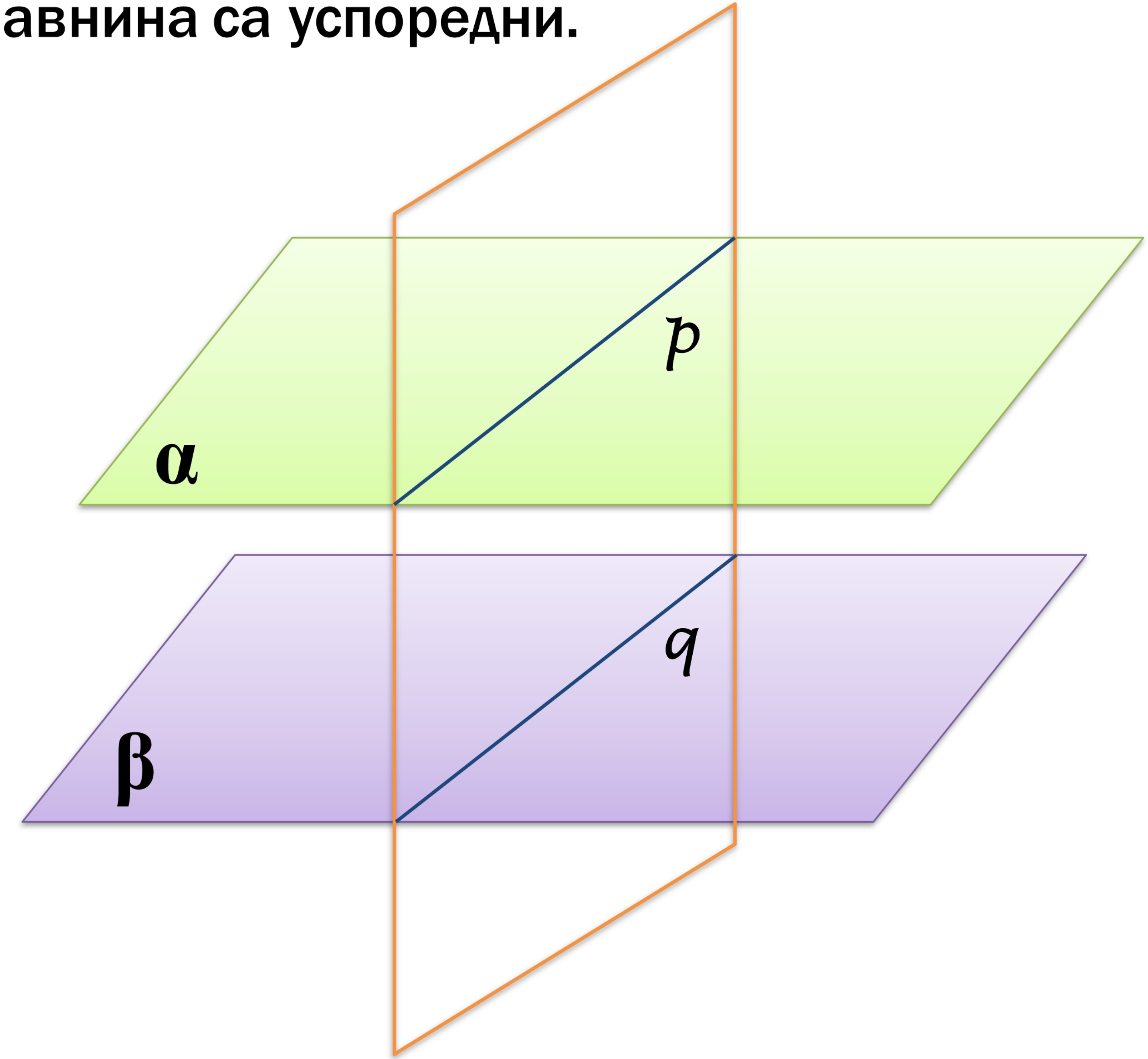


Теореми за успоредност на равнини

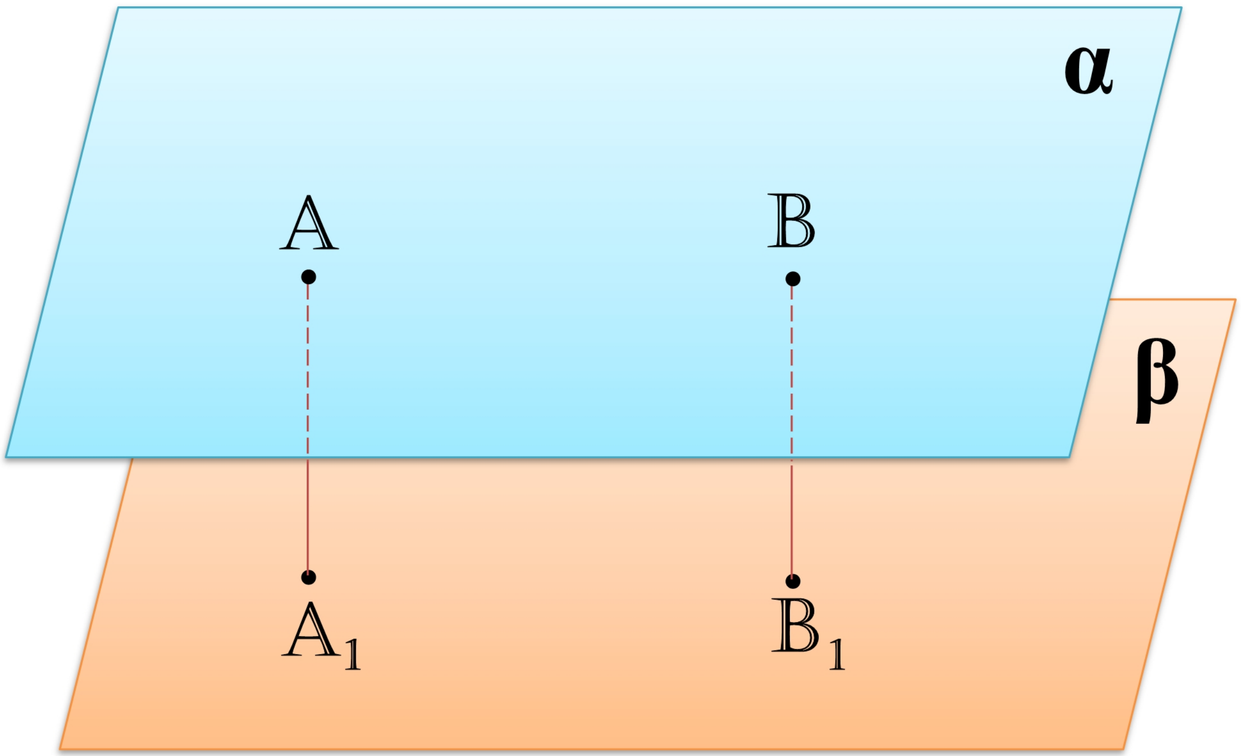
1. <u>Теорема 1</u>: Ако 2 пресекателни прави от една равнина са успоредни (‖) на 2 прави от друга равнина (≠ от първата), то двете равнини са ‖.
   - *Достатъчно условие за успоредност на две равнини*



2. <u>Теорема 2:</u> **Пресечниците на 2 успоредни равнини с 3-та равнина са успоредни.**

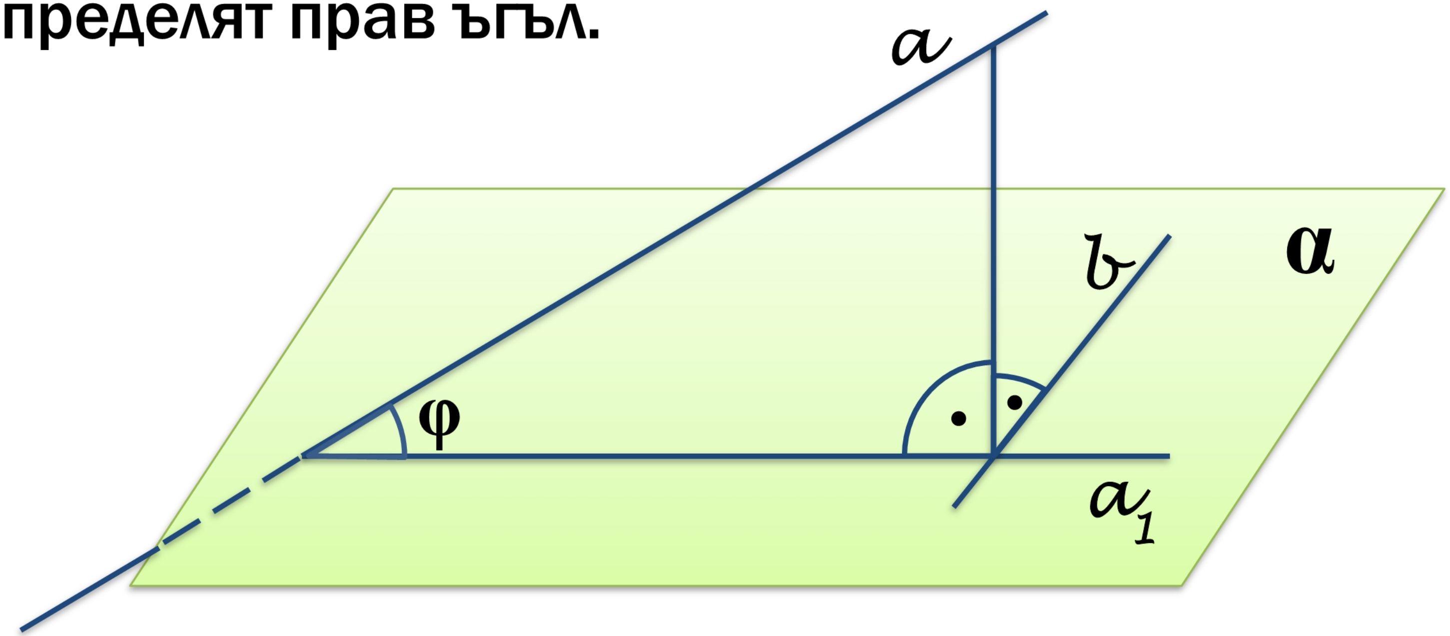


<u>Определение:</u>* *Разстоянието между 2 успоредни равнини **е разстоянието от произволна точка от едната равнина до другата равнина.**



Ъгъл, определен от права и равнина

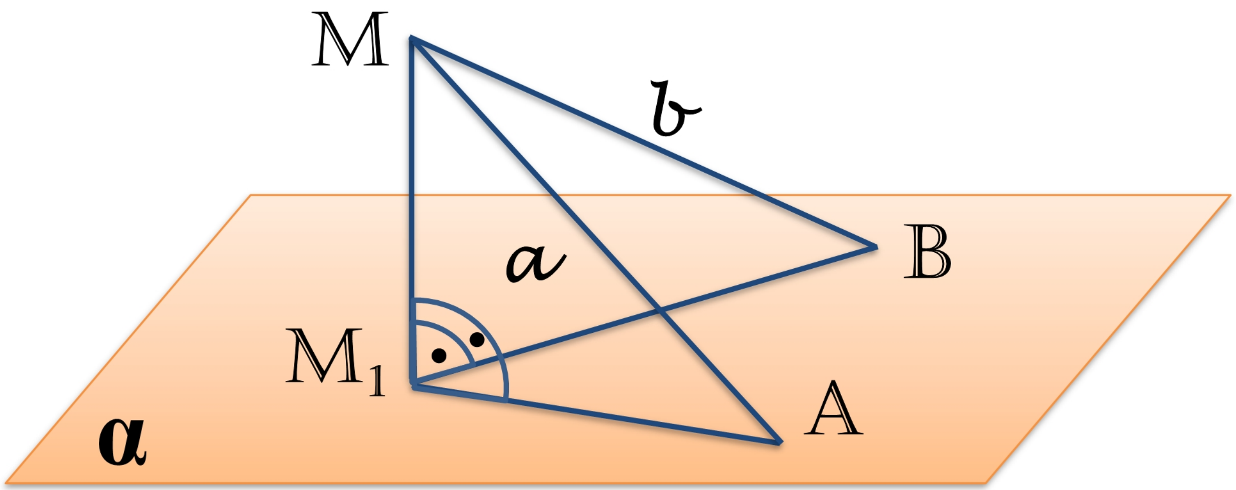
1. ***Определение 1:*** ***Ъгъл***, определен от ***неперпендикулярни прави и равнина***, се нарича ъгълът, определен от правата и ортогоналната ѝ проекция върху равнината.
2. ***Определение 2:*** Ако права и равнина са $\perp$, считаме, че те определят прав ъгъл.



Перпендикуляр и наклонени към равнина

Определение: **Перпендикулярът от точка към равнина е по-малък от всяка наклонена от същата точка към равнината.**

1. **<u>Теорема 1</u>: Ако 2 наклонени от една и съща точка към дадена равнина са равни, то равни са и техните ортогонални проекции в равнината и обратно.**



Свойства на две наклонени към равнина

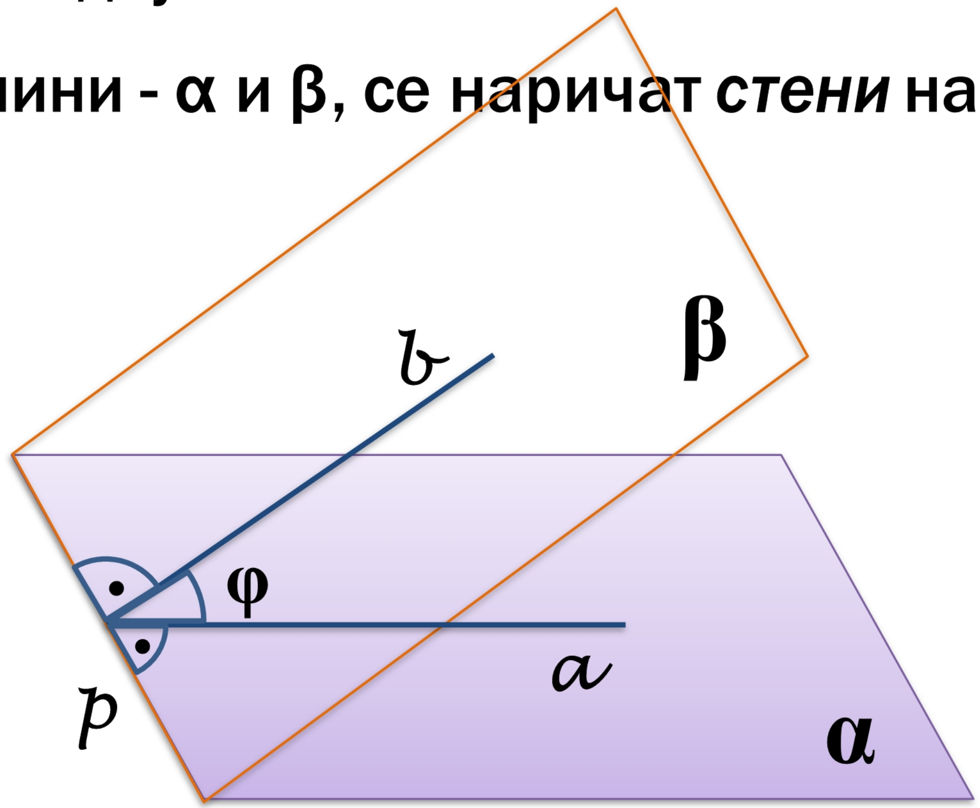
1) Свойство 1: Ако две наклонени са равни, то равни са и ъглите, които те определят с проекционната равина.
2) Свойство 2: Ако ортогоналните проекции на две наклонени са равни, то наклонените определят равни ъгли с проекционната равнина.
3) Свойство 3: По-малката от две наклонени определя по-голям проекционен ъгъл с проекционната равнина.
4) Свойство 4: Наклонената с по-малка ортогонална проекция определя по-голям ъгъл с проекционната ранина.

Двустенен ъгъл

Двустенният ъгъл е фигура, която се състои от 2 полуравнини (α и β) с общ контур (правата *p*).

Общият контур *p* на двете полуравнини на двустенният ъгъл, се нарича ***ръб*** на двустенния ъгъл.

Двете полуравнини - α и β, се наричат ***стени*** на двустенния ъгъл.



Равнина, която е $\perp$ на ръба на двустенния ъгъл, пресича стените му в 2 лъча, които образуват ъгъл, наречен *линеен ъгъл* на двустенния ъгъл.

Определение: **Ъгъл, на който върхът лежи на ръба на двустенния ъгъл, а рамената му са съответно от стените на двустенния ъгъл и са $\perp$ на ръба му, се нарича *линеен ъгъл на даден двустенен ъгъл.***

Теорема: Всички линейни ъгли на един двустенен ъгъл са равни.

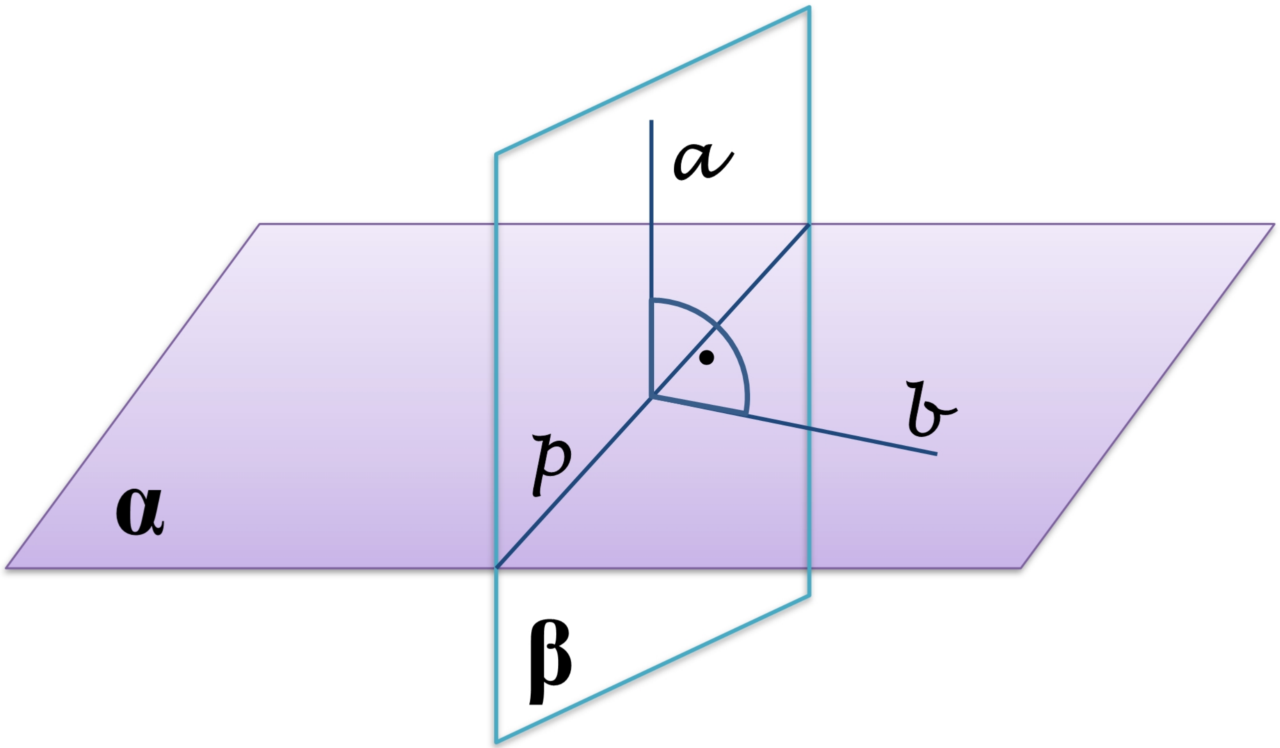
<u>Критерии за сравняване на двустенни ъгли</u>

1) Два двустенни ъгъла са <u>равни</u>, когато линейните им ъгли са равни.
2) От 2 двустенни ъгъла <u>по-голям</u> е този, който има по-голям линеен ъгъл.
3) Един двустенен ъгъл се нарича <u>прав</u>, когато линейният му ъгъл е прав.
4) <u>Ъглополовяща</u> на двустенен ъгъл се нарича полуравнината с контур ръба на двустенния ъгъл, която образува със стените на двустенния ъгъл равни двустенни ъгли.
5) <u>Мярка</u> на един двустенен ъгъл се нарича мярката на линейния му ъгъл.

Перпендикулярни равнини

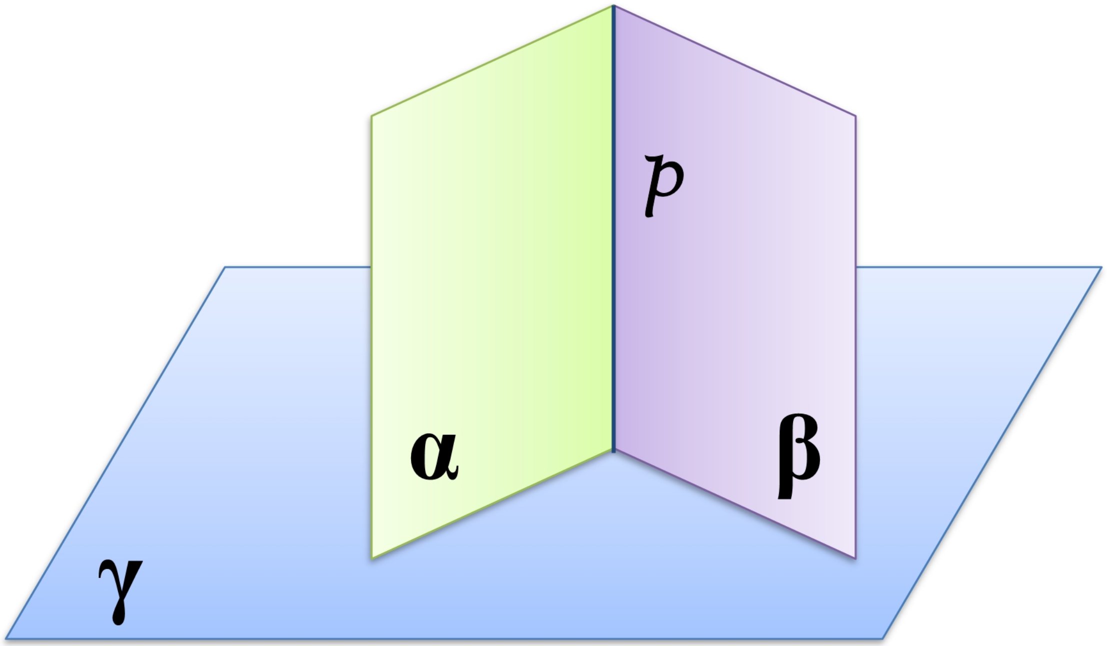
Определение: **Две равнини, които определят прав двустенен ъгъл, се наричат *перпендикулярни равнини*.**

1. **Теорема 1: Ако права е перпендикулярна ($\perp$) на дадена равнина, то всяка равнина, която минава през правата, е перпендикулярна на дадената.**



__*Следствие:*__ Ако пресичащата (*p*) на две равнини (α и β) е ⊥ на трета равнина (γ), то всяка от двете равнини е перпендикулярна на третата (α ⊥ γ и β ⊥ γ).

2. __Теорема 2:__ Ако 2 равнини са ⊥, то всяка права, която лежи в едната от двете равнини и е ⊥ на пресечницата им, е ⊥ на другата равнина.



1) ***<u>Следствие 1:</u>*** **Ако 2 равнини са перпендикулярни ($\perp$) и през точка от едната равнина е построен перпендикуляр към другата равнина, то той лежи изцяло в първата равнина.**

2) ***<u>Следствие 2:</u>*** **Ако 2 пресекателни равнини са $\perp$ на трета равнина, то и пресечницата им е $\perp$ на третата равнина.**